

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 983730 18 giugno 2025
--------------------------------	--------------------	---------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	d
2	b
3	c
4	d
5	d
6	c
7	d
8	a
9	d
10	b

1. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(a) ha un solo punto di minimo locale

(b) ha due punti di minimo locale

(c) ha almeno un punto di massimo locale

► (d) non ha nessun punto di massimo o minimo locale

Soluzione:

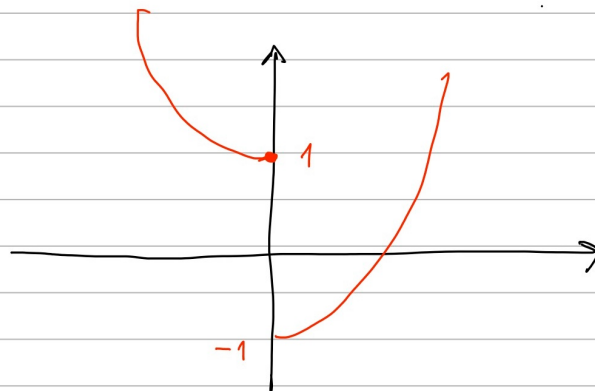
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 4x^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

quindi $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$. Ne segue che, per il teorema di Fermat, non ci sono punti di massimo o di minimo locali nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

L'unico punto da verificare resta $x=0$. Osserviamo che $f(0)=1$ e che $f(x) > 1$ se $x < 0$ ma $f(x) < 1$ in un intorno sinistro di 0, quindi anche $x=0$ non è né punto di massimo né di minimo locale.



2. La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^5 - 3)e^{1-x^3}$

- (a) ha sia massimo che minimo
- (b) ha massimo ma non ha minimo
- (c) non ha né massimo né minimo
- (d) è limitata inferiormente ma non ha minimo

Soluzione:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^5 - 3)e^{1-x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ((-\infty)^5 - 3)e^{1-(-\infty)^3} = (-\infty - 3)e^{1+\infty} = (-\infty)e^{+\infty} =$$

$= -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$. quindi f non ha minimo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (\infty - 3)e^{1-(\infty)^3} = \infty e^{-\infty} = \infty \cdot 0 = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3}{e^{x^3 - 1}} = 0 \quad \text{per gerarchia degli infiniti.}$$

$$\text{Inoltre } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^5 - 3)e^{1-x^3} \geq 0 \Leftrightarrow x^5 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^5 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt[5]{3}, \text{ quindi esiste almeno un punto dove } f \geq 0.$$

Per Weierstrass generalizzato, f ha massimo (f è continua).

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x)e^{\sin x} dx =$$

(a) $2\sqrt{e} - 2$

(b) $-\frac{2\sqrt{e}+1}{4}$

► (c) $2 - \sqrt{e}$

(d) $\frac{\sqrt{e}(4+\sqrt{3})}{4} - 3$

Soluzione:

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx$$

Calcoliamo una primitiva integrando con la sostituzione

$$\sin x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \cos x, \quad dt = \cos x dx$$

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = \int 2 \sin x \cos x e^{\sin x} dx = \int 2 t e^t dt$$

Integriamo ora per parti derivando t e integrando e^t

$$\int 2 t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int 1 \cdot e^t dt \right) = 2 (t e^t - e^t) = 2 e^t (t - 1)$$

Quindi

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = 2 e^t (t - 1) = 2 e^{\sin x} (\sin x - 1).$$

Dal teorema di Torricelli

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx = \left[2 e^{\sin x} (\sin x - 1) \right]_0^{\pi/6} =$$

$$= 2 \left(e^{1/2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - e^0 (0 - 1) \right) = 2 \left(\sqrt{e} \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) = 2 - \sqrt{e}.$$

4. La funzione $F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{\log(1+t^4)}{t^2+1} dt & \text{se } x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(a) non è continua (b) ha un punto di cuspidè (c) è derivabile ► (d) ha un punto angoloso

Soluzione:

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{\log(1+t^4)}{t^2+1} dt & \text{se } x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che se $x < 1$ la F è derivabile in quanto primitiva di una funzione continua. F è derivabile anche per $x > 1$ perché composizione e somma di funzioni derivabili.

Verifichiamo la continuità e la derivabilità in $x=1$.

A sinistra F è derivabile in quanto primitiva di una funzione continua e, dal teorema fondamentale del calcolo integrale risulta

$$F'_-(1) = \frac{\log(1+1)}{1+1} = \frac{\log 2}{2}.$$

La derivabilità a sinistra implica la continuità a sinistra.

$$\text{Dato che } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

e che

$$F(1) = \int_1^1 \frac{\log(1+t^4)}{t^2+1} dt = 0$$

otteniamo che F è continua anche a destra in $x=1$.

Osserviamo ora che $F'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \quad \forall x > 1$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = 0 - 1 = -1. \text{ Dato che } F \text{ è}$$

continua in $x=1$, un corollario del teorema di de l'Hôpital ci garantisce che $F'_+(1) = -1 \neq F'_-(1) = \frac{\log 2}{2}$. Ne segue che

$x=1$ è un punto angoloso per F .

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log 2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}} dx$

(a) non esiste

(b) converge

(c) diverge positivamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}}$ e dividiamo l'intervallo di integrazione in $x > 1$. Cominciamo con $\int_0^1 f(x) dx$

Osserviamo che $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ e che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, quindi, per il criterio del confronto, $\int_0^1 f(x) dx$ converge assolutamente quindi converge.

Vediamo ora $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Osserviamo che, per $x \rightarrow +\infty$ risulta

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x &= e^{x \log\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)} = e^{x \left(\frac{1+\log^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= e^{1+\log^2 + o(1)} \rightarrow e^{1+\log^2} = e \cdot e^{\log^2} = 2e. \end{aligned}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\cancel{\sqrt{x}}} = \sin(2e)$$

e che $\sin(2e) < 0$ dato che $\pi < 2e < 2\pi$.

Da questo limite otteniamo che $f(x)$ è negativa in un intorno di $+\infty$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$, dal criterio del confronto

asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge negativamente.

6. L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} dx$

- (a) diverge a $-\infty$ (b) non esiste ► (c) converge (d) diverge a $+\infty$

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} dx$$

dato che $\frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$ possiamo utilizzare i criteri di confronto. Dividiamo l'integrale su due intervalli.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} dx \quad e \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} dx$$

per $x \rightarrow 0$ $\arctan x = x + o(x^2)$ quindi $\frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} = \frac{x + o(x^2)}{x^{1/2}(1+3x^4)} = \frac{x^{1/2} + o(x^{3/2})}{1+3x^4} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

quindi la funzione integranda è limitata in $(0, 1]$, pertanto è integrabile secondo Riemann. $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} dx$ converge

Vediamo il caso $x \in [1, +\infty)$.

$$\frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} = \frac{\arctan x}{\sqrt{x} \cdot x^4 (x^{-4} + 3)} = \frac{\arctan x}{3 + \frac{1}{x^4}} \cdot \frac{1}{x^{9/2}}$$

utilizziamo il criterio del confronto asintotico con

$$f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} \quad e \quad g(x) = \frac{1}{x^{9/2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} \cdot x^{9/2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{3 + \frac{1}{x^4}} = \frac{\pi}{6} \neq 0, +\infty$$

Dato che $\frac{9}{2} > 1$ abbiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{9/2}} dx$ converge quindi anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. Quando i due intervalli abbiamo che $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+3x^4)} dx$ converge

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} =$

- (a) e^2 (b) 1 (c) $+\infty$ ► (d) 0

Soluzione:

$$a_n = \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} = \frac{e^{2n} n n^{\frac{1}{n}}}{n!}$$

Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$, consideriamo

quindi

$$b_n = \frac{e^{2n} n}{n!} \quad \text{e utilizziamo il criterio del rapporto.}$$

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{e^{2n+2} (n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^{2n} n} = \frac{e^2 (n+1)}{n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{e^2 \cancel{(n+1)}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n+1}} = \\ &= \frac{e^2}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il criterio del rapporto ci garantisce quindi che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Poichè $a_n = b_n \cdot n^{\frac{1}{n}}$ otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) \log n}{2n+1}$

- (a) converge ma non converge assolutamente (b) diverge negativamente
(c) diverge positivamente (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \log n}{2n+1}.$$

Osserviamo che $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$.

Poniamo $a_n = \frac{\log n}{2n+1}$ e scriviamo la serie come $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$.

Poiché $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$, la serie è a segni alterni.

Osserviamo anche che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{2n+1} = 0$. Verifichiamo ora la

decrecenza di $\{a_n\}$. Poniamo $f(x) = \frac{\log x}{2x+1}$. Risulta

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x+1) - (\log x) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2 + \frac{1}{x} - 2 \log x}{(2x+1)^2}.$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - 2 \log x = -\infty$, otteniamo che $f'(x) < 0$

in un intorno di $+\infty$, quindi f è definitivamente decrescente

e di conseguenza anche a_n lo è. Per il criterio di Leibniz la

serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

Invece $\sum_{n \geq 1} |(-1)^n a_n| = \sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{2n+1}$ diverge per

il criterio del confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{(2n+1)} = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_n b_n = +\infty.$$

La serie data quindi converge ma non converge assolutamente.

9. La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{\arctan(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$

- (a) è limitata superiormente ma non inferiormente (b) non è né superiormente né inferiormente limitata
(c) è limitata inferiormente ma non superiormente (d) è limitata

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{\arctan(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Osserviamo che

$$|f(x,y)| = \frac{|\arctan(xy) - x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{|\arctan(xy)|}{1 + x^2 + y^2} + \frac{|-x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+0+0} + \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{2} + 1$$

quindi f è limitata.

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^2 + y^2} =$

(a) -1

► (b) non esiste

(c) ∞

(d) 0

Soluzione:

Consideriamo la restrizione lungo l'asse y , cioè la curva $\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$

$$f(0,t) = \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = -1 \rightarrow -1$$

La restrizione lungo l'asse x , cioè la curva $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}$

diventa $f(t,0) = \frac{t^4 - 0}{t^2 + 0} = t^2 \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$.

I due limiti sono diversi quindi il limite non esiste.

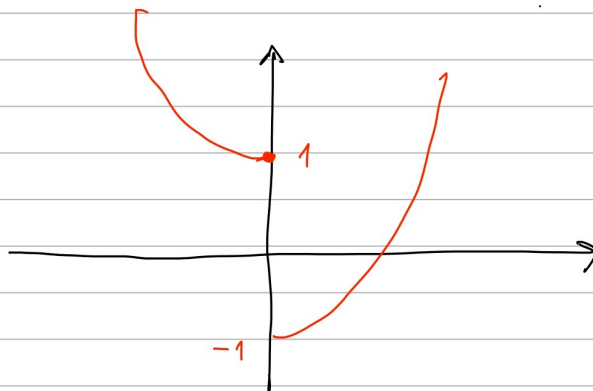
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 4x^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

quindi $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$. Ne segue che, per il teorema di Fermat, non ci sono punti di massimo o di minimo locali nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

L'unico punto da verificare resta $x=0$. Osserviamo che $f(0)=1$ e che $f(x) > 1$ se $x < 0$ ma $f(x) < 1$ in un intorno sinistro di 0, quindi anche $x=0$ non è né punto di massimo né di minimo locale.



2. La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan x + e^{\arctan x}$

(a) è surgettiva ma non iniettiva

(b) è bigettiva

(c) non è né iniettiva né surgettiva

► (d) è iniettiva ma non surgettiva

Soluzione:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x + e^{\operatorname{arctg} x}$$

Le funzioni arcotangente ed esponenziali sono strettamente crescenti, quindi la composizione è strettamente crescente, così come la somma. Quindi f è strettamente crescente, e di conseguenza iniettiva. Osserviamo ora che

$$f(x) < \frac{\pi}{2} + e^{\pi/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi f non è surgettiva.

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x) e^{\sin x} dx =$$

► (a) $2 - \sqrt{e}$

(b) $-\frac{2\sqrt{e}+1}{4}$

(c) $\frac{\sqrt{e}(4+\sqrt{3})}{4} - 3$

(d) $2\sqrt{e} - 2$

Soluzione:

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx$$

Calcoliamo una primitiva integrando con la sostituzione

$$\sin x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \cos x, \quad dt = \cos x dx$$

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = \int 2 \sin x \cos x e^{\sin x} dx = \int 2 t e^t dt$$

Integriamo ora per parti derivando t e integrando e^t

$$\int 2 t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int 1 \cdot e^t dt \right) = 2 (t e^t - e^t) = 2 e^t (t - 1)$$

Quindi

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = 2 e^t (t - 1) = 2 e^{\sin x} (\sin x - 1).$$

Dal teorema di Torricelli

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx = \left[2 e^{\sin x} (\sin x - 1) \right]_0^{\pi/6} =$$

$$= 2 \left(e^{1/2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - e^0 (0 - 1) \right) = 2 \left(\sqrt{e} \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) = 2 - \sqrt{e}.$$

4. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \cos(x^2) dx =$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{3} \sin \sqrt{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3} \cos \sqrt{\frac{\pi}{3}} - \sqrt{3} \right)$

(b) $\frac{\pi}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$

► (c) $\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right)$

(d) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{72}$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$$x^2 = t \quad \frac{dt}{dx} = 2x \quad \frac{dt}{2} = x dx$$

$$\int x^3 \cos(x^2) dx = \int x^2 \cos(x^2) x dx = \int t \cos t \frac{dt}{2}$$

ora integriamo per parti derivando t e integrando $\cos t$

$$= \frac{1}{2} \left(t \sin t - \int 1 \cdot \sin t dt \right) = \frac{1}{2} (t \sin t + \cos t) + c =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)) + c$$

Dal teorema di Torricelli otteniamo che

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \cos(x^2) dx = \left[\frac{1}{2} (x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)) \right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - 0 - \cos 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right)$$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \left(\left(1 + \frac{1+\log 2}{x} \right)^x \right)}{\sqrt{x}} dx$

(a) diverge positivamente ► (b) diverge negativamente (c) non esiste

(d) converge

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}}$ e dividiamo l'intervallo di integrazione in $x > 1$. Cominciamo con $\int_0^1 f(x) dx$

Osserviamo che $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ e che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, quindi, per il criterio del confronto, $\int_0^1 f(x) dx$ converge assolutamente quindi converge.

Vediamo ora $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Osserviamo che, per $x \rightarrow +\infty$ risulta

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x &= e^{x \log\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)} = e^{x \left(\frac{1+\log^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= e^{1+\log^2 + o(1)} \rightarrow e^{1+\log^2} = e \cdot e^{\log^2} = 2e. \end{aligned}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\cancel{\sqrt{x}}} = \sin(2e)$$

e che $\sin(2e) < 0$ dato che $\pi < 2e < 2\pi$.

Da questo limite otteniamo che $f(x)$ è negativa in un intorno di $+\infty$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$, dal criterio del confronto

asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge negativamente.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{|x|^{\frac{5}{2}}} dx$

(a) converge a 0

► (b) non esiste

(c) converge a un valore strettamente positivo

(d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \frac{\sin x}{|x|^{5/2}}$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione in quattro parti:

$$(-\infty, +\infty) = (-\infty, -1] \cup [-1, 0) \cup (0, 1] \cup [1, +\infty).$$

Osserviamo che $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{|-x|^{5/2}} = -\frac{\sin x}{|x|^{5/2}} = -f(x)$

quindi f è dispari.

Per $x \rightarrow 0$ $\sin x = x + o(x^2)$ quindi $f(x) = \frac{x + o(x^2)}{x^{5/2}} = \frac{1 + o(x)}{x^{3/2}}$

Consideriamo ora $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e otteniamo che

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Dato che $\int_0^1 g(x) dx = +\infty$ (poiché $\frac{3}{2} \geq 1$),

per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 f(x) dx = +\infty$.

Per simmetria $\int_0^1 f(x) dx = -\infty$

Ne segue che la somma di 4 integrali

$$\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

è presente almeno una somma indeterminata $+\infty - \infty$

quindi l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ non esiste.

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} =$

(a) 1

(b) e^2

► (c) 0

(d) $+\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} = \frac{e^{2n} n n^{\frac{1}{n}}}{n!}$$

Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$, consideriamo quindi

$$b_n = \frac{e^{2n} n}{n!} \quad \text{e utilizziamo il criterio del rapporto.}$$

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{e^{2n+2} (n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^{2n} n} = \frac{e^2 (n+1)}{n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{e^2 \cancel{(n+1)}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n+1}} = \\ &= \frac{e^2}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il criterio del rapporto ci garantisce quindi che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Poichè $a_n = b_n \cdot n^{\frac{1}{n}}$ otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) \log n}{2n+1}$

- (a) converge assolutamente
- (b) diverge positivamente
- (c) diverge negativamente
- (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \log n}{2n+1}.$$

Osserviamo che $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$.

Poniamo $a_n = \frac{\log n}{2n+1}$ e scriviamo la serie come $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$.

Poiché $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$, la serie è a segni alterni.

Osserviamo anche che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{2n+1} = 0$. Verifichiamo ora la

decrecenza di $\{a_n\}$. Poniamo $f(x) = \frac{\log x}{2x+1}$. Risulta

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x+1) - (\log x) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2 + \frac{1}{x} - 2 \log x}{(2x+1)^2}.$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - 2 \log x = -\infty$, otteniamo che $f'(x) < 0$

in un intorno di $+\infty$, quindi f è definitivamente decrescente

e di conseguenza anche a_n lo è. Per il criterio di Leibniz la

serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

Invece $\sum_{n \geq 1} |(-1)^n a_n| = \sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{2n+1}$ diverge per

il criterio del confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{(2n+1)} = 0, \quad n \rightarrow +\infty \text{ e } \sum_n b_n = +\infty.$$

La serie data quindi converge ma non converge assolutamente.

9. La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{\arctan(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$

- (a) non è né superiormente né inferiormente limitata (b) è limitata inferiormente ma non superiormente
 ► (c) è limitata (d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{\arctan(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Osserviamo che

$$|f(x,y)| = \frac{|\arctan(xy) - x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{|\arctan(xy)|}{1 + x^2 + y^2} + \frac{|-x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+0+0} + \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{2} + 1$$

quindi f è limitata.

10. I punti stazionari della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$ sono

- (a) un solo punto (b) infiniti (c) nessuno ► (d) due

Soluzione:

$$f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$$

$$f_x = 3x^2 + 2y$$

$$f_y = 2x - 4y$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

sostituiamo la 2^a nella 1^a ottenendo

$$3 \cdot 4y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y(6y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = -\frac{1}{6}$$

Se $y = 0$, $x = 2y \Rightarrow x = 0$, quindi $(0,0)$ è soluzione.

Se $y = -\frac{1}{6}$, $x = 2y \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$, quindi $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ è soluzione.

La funzione ha 2 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 402154 18 giugno 2025
--------------------------------	--------------------	---------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	d
2	b
3	c
4	c
5	b
6	b
7	b
8	b
9	a
10	c

1. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(a) ha due punti di minimo locale

(b) ha almeno un punto di massimo locale

(c) ha un solo punto di minimo locale

► (d) non ha nessun punto di massimo o minimo locale

Soluzione:

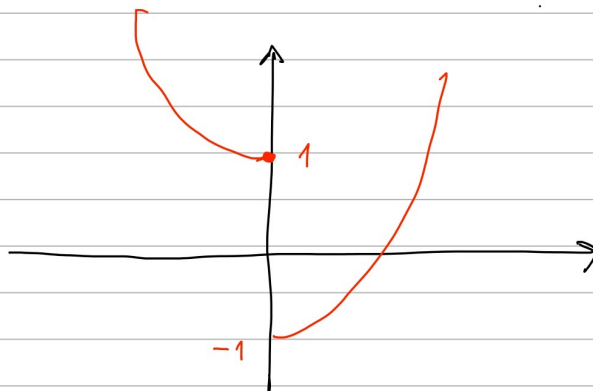
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 4x^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

quindi $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$. Ne segue che, per il teorema di Fermat, non ci sono punti di massimo o di minimo locali nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

L'unico punto da verificare resta $x=0$. Osserviamo che $f(0)=1$ e che $f(x) > 1$ se $x < 0$ ma $f(x) < 1$ in un intorno sinistro di 0, quindi anche $x=0$ non è né punto di massimo né di minimo locale.



2. La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x}(3 + \cos x)$

- (a) ha minimo ma non ha massimo
- (b) non ha né massimo né minimo
- (c) ha massimo ma non ha minimo
- (d) ha infiniti punti di minimo locale

Soluzione:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x} (3 + \cos x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-\infty} \cdot \text{limitata} \approx 0 \cdot \text{limitata} \approx 0$$

Per $x \rightarrow -\infty$ osserviamo che

$$f(x) \geq e^{-x} (3 - 1) = 2e^{-x}$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{-x} = 2e^{+\infty} = +\infty$$

quindi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e di conseguenza f non ha massimo.

Dato che $f(x) \geq 2e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, dal teorema di Weierstrass generalizzato, f non ha minimo.

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x) e^{\sin x} dx =$$

(a) $2\sqrt{e} - 2$

(b) $\frac{\sqrt{e}(4 + \sqrt{3})}{4} - 3$ ► (c) $2 - \sqrt{e}$

(d) $-\frac{2\sqrt{e} + 1}{4}$

Soluzione:

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx$$

Calcoliamo una primitiva integrando con la sostituzione

$$\sin x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \cos x, \quad dt = \cos x dx$$

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = \int 2 \sin x \cos x e^{\sin x} dx = \int 2 t e^t dt$$

Integriamo ora per parti derivando t e integrando e^t

$$\int 2 t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int 1 \cdot e^t dt \right) = 2 (t e^t - e^t) = 2 e^t (t - 1)$$

Quindi

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = 2 e^t (t - 1) = 2 e^{\sin x} (\sin x - 1).$$

Dal teorema di Torricelli

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx = \left[2 e^{\sin x} (\sin x - 1) \right]_0^{\pi/6} =$$

$$= 2 \left(e^{1/2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - e^0 (0 - 1) \right) = 2 \left(\sqrt{e} \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) = 2 - \sqrt{e}.$$

4. La funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} \log^2 t dt$

- (a) ha massimo ma non ha minimo
- (b) non ha né massimo né minimo
- (c) ha minimo ma non ha massimo
- (d) ha sia massimo che minimo

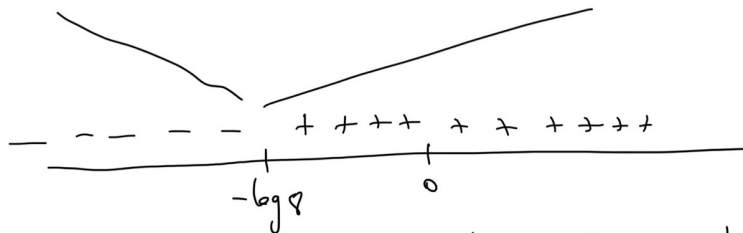
Soluzione:

$$F(x) = \int_{e^x}^{e^{2x}} \log^2 t \, dt$$

$$F'(x) = \log^2(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} - \log^2(e^x) \cdot e^x = (2x)^2 \cdot 2e^{2x} - x^2 \cdot e^x =$$

$$= 8x^2 e^{2x} - x^2 e^x = x^2 e^x (8e^x - 1)$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow 8e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{8} \Leftrightarrow x > \log\left(\frac{1}{8}\right) = -\log 8$$



$$F'(-\log 8) = 0$$

$$F'(0) = 0$$

F è strettamente decrescente in $(-\infty, -\log 8]$ e strettamente crescente in $[-\log 8, 0]$ e in $[0, +\infty)$, quindi strettamente crescente in $[-\log 8, +\infty)$. Ne segue che $x = -\log 8$ è punto di minimo per F . F non ha massimo.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log 2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}} \, dx$

- (a) non esiste ► (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente (d) converge

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}}$ e dividiamo l'intervallo di integrazione in $x > 1$. Cominciamo con $\int_0^1 f(x) dx$

Osserviamo che $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ e che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, quindi, per il criterio del confronto, $\int_0^1 f(x) dx$ converge assolutamente quindi converge.

Vediamo ora $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Osserviamo che, per $x \rightarrow +\infty$ risulta

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x &= e^{x \log\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)} = e^{x \left(\frac{1+\log^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= e^{1+\log^2 + o(1)} \rightarrow e^{1+\log^2} = e \cdot e^{\log^2} = 2e. \end{aligned}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\cancel{\sqrt{x}}} = \sin(2e)$$

e che $\sin(2e) < 0$ dato che $\pi < 2e < 2\pi$.

Da questo limite otteniamo che $f(x)$ è negativa in un intorno di $+\infty$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$, dal criterio del confronto

asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge negativamente.

6. $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x\sqrt{x}} dx$

(a) vale $+\infty$

► (b) non esiste

(c) vale $-\infty$

(d) esiste finito

Soluzione:

Osserviamo che $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x}}$ non è limitata in un intorno di 0, dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x\sqrt{x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Dividiamo l'intervallo di integrazione e studiamo separatamente

$$\int_0^1 f(x) dx, \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) = \frac{x-1}{x^{3/2}}$, inoltre $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1]$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

Dato che $\int_0^1 g(x) dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico

otteniamo che $\int_0^1 f(x) dx = -\infty$.

Per $x \rightarrow +\infty$ scegliamo invece $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^{3/2}} \cdot x^{1/2} = 1.$$

In questo caso $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e ottenere che

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty, \quad \text{dato che} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}} = +\infty.$$

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ non esiste.

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} =$

(a) e^2

► (b) 0

(c) 1

(d) $+\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} = \frac{e^{2n} n n^{\frac{1}{n}}}{n!}$$

Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$, consideriamo quindi

$b_n = \frac{e^{2n} n}{n!}$ e utilizziamo il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{e^{2n+2} (n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^{2n} n} = \frac{e^2 (n+1)}{n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{e^2 \cancel{(n+1)}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n+1}} = \\ &= \frac{e^2}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il criterio del rapporto ci garantisce quindi che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Poichè $a_n = b_n \cdot n^{\frac{1}{n}}$ otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) \log n}{2n+1}$

(a) converge assolutamente

► (b) converge ma non converge assolutamente

(c) diverge negativamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) \log n}{2n+1}.$$

Osserviamo che $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$.

Poniamo $a_n = \frac{\log n}{2n+1}$ e scriviamo la serie come $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$.

Poiché $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$, la serie è a segni alterni.

Osserviamo anche che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{2n+1} = 0$. Verifichiamo ora la

decrecenza di (a_n) . Poniamo $f(x) = \frac{\log x}{2x+1}$. Risulta

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x+1) - (\log x) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2 + \frac{1}{x} - 2 \log x}{(2x+1)^2}.$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - 2 \log x = -\infty$, otteniamo che $f'(x) < 0$

in un intorno di $+\infty$, quindi f è definitivamente decrescente

e di conseguenza anche a_n lo è. Per il criterio di Leibniz la

serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

Invece $\sum_{n \geq 1} |(-1)^n a_n| = \sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{2n+1}$ diverge per

il criterio del confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{(2n+1)} = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_n b_n = +\infty.$$

La serie data quindi converge ma non converge assolutamente.

9. La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{\arctan(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$

- (a) è limitata (b) è limitata superiormente ma non inferiormente
(c) non è né superiormente né inferiormente limitata (d) è limitata inferiormente ma non superiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{\arctan(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Osserviamo che

$$|f(x,y)| = \frac{|\arctan(xy) - x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{|\arctan(xy)|}{1 + x^2 + y^2} + \frac{|-x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+0+0} + \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{2} + 1$$

quindi f è limitata.

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(y - x^3) + 3}{y - x^3} =$

(a) non esiste

(b) 0

► (c) $-\infty$

(d) $+\infty$

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{\log(y - x^3) + 3}{y - x^3}$$

Osserviamo che f è definita se $y - x^3 > 0$, quindi sul dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^3\}$.

Dovremo quindi considerare che $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ma $(x,y) \in \Omega$.

Allora avremo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(y - x^3) + 3}{y - x^3} = \frac{\log(0) + 3}{0^+} = \frac{-\infty + 3}{0^+} = (-\infty) \cdot \left(\frac{1}{0^+}\right) =$$

$$= (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 947757 18 giugno 2025
--------------------------------	--------------------	---------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	b
2	a
3	d
4	c
5	a
6	d
7	c
8	d
9	c
10	c

1. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(a) ha almeno un punto di massimo locale
(c) ha un solo punto di minimo locale

▶ (b) non ha nessun punto di massimo o minimo locale
(d) ha due punti di minimo locale

Soluzione:

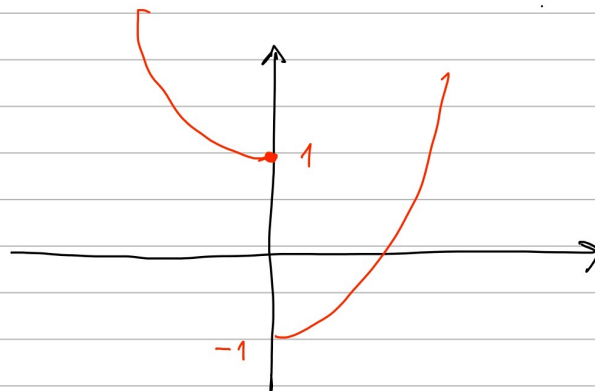
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^4 - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 4x^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

quindi $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$. Ne segue che, per il teorema di Fermat, non ci sono punti di massimo o di minimo locali nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

L'unico punto da verificare resta $x=0$. Osserviamo che $f(0)=1$ e che $f(x) > 1$ se $x < 0$ ma $f(x) < 1$ in un intorno sinistro di 0, quindi anche $x=0$ non è né punto di massimo né di minimo locale.



2. La funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2(1+x^2)}\right)$

- (a) ha un asintoto orizzontale e uno verticale
- (b) non è limitata inferiormente
- (c) ha minimo assoluto
- (d) ha un asintoto obliquo

Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2(1+x^2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2(1+\infty)} \right) = \operatorname{tg} 0 = 0$$

quindi f ha l'asintoto orizzontale di equazione $y=0$
per $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2(1+0^+)} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2}^- \right) = +\infty$$

quindi f ha l'asintoto verticale di equazione $x = \frac{\pi}{2}$.

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x) e^{\sin x} dx =$$

(a) $-\frac{2\sqrt{e}+1}{4}$

(b) $\frac{\sqrt{e}(4+\sqrt{3})}{4} - 3$

(c) $2\sqrt{e} - 2$

► (d) $2 - \sqrt{e}$

Soluzione:

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx$$

Calcoliamo una primitiva integrando con la sostituzione

$$\sin x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \cos x, \quad dt = \cos x dx$$

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = \int 2 \sin x \cos x e^{\sin x} dx = \int 2 t e^t dt$$

Integriamo ora per parti derivando t e integrando e^t

$$\int 2 t e^t dt = 2 \left(t e^t - \int 1 \cdot e^t dt \right) = 2 (t e^t - e^t) = 2 e^t (t - 1)$$

Quindi

$$\int \sin(2x) e^{\sin x} dx = 2 e^t (t - 1) = 2 e^{\sin x} (\sin x - 1).$$

Dal teorema di Torricelli

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x) e^{\sin x} dx = \left[2 e^{\sin x} (\sin x - 1) \right]_0^{\pi/6} =$$

$$= 2 \left(e^{1/2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - e^0 (0 - 1) \right) = 2 \left(\sqrt{e} \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) = 2 - \sqrt{e}.$$

4. Data $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^{4x} \frac{2e^t}{(|t|+1)(e^t + e^{-t})} dt$$

risulta che $F'(1) =$

(a) $\frac{4e^2}{e^2 + 1}$

(b) 0

► (c) $\frac{8e^8}{5(e^8 + 1)}$

(d) non esiste

Soluzione:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^{4x} \frac{2e^t}{(|t|+1)(e^t + e^{-t})} dt$$

Ricordando la formula

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

otteniamo

$$F'(x) = \frac{2e^{4x}}{(|4x|+1)(e^{4x} + e^{-4x})} \cdot 4 \quad \text{quindi}$$

$$F'(1) = \frac{2e^4}{(4+1)(e^4 + e^{-4})} \cdot 4 = \frac{8e^4}{5(e^4 + e^{-4})} = \frac{8e^8}{5(e^8 + 1)}$$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log 2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}} dx$

► (a) diverge negativamente (b) non esiste

(c) converge

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\sqrt{x}}$ e dividiamo l'intervallo di integrazione in $x > 1$. Cominciamo con $\int_0^1 f(x) dx$

Osserviamo che $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ e che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, quindi, per il criterio del confronto, $\int_0^1 f(x) dx$ converge assolutamente quindi converge.

Vediamo ora $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Osserviamo che, per $x \rightarrow +\infty$ risulta

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x &= e^{x \log\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)} = e^{x \left(\frac{1+\log^2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\ &= e^{1+\log^2 + o(1)} \rightarrow e^{1+\log^2} = e \cdot e^{\log^2} = 2e. \end{aligned}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1+\log^2}{x}\right)^x\right)}{\cancel{\sqrt{x}}} = \sin(2e)$$

e che $\sin(2e) < 0$ dato che $\pi < 2e < 2\pi$.

Da questo limite otteniamo che $f(x)$ è negativa in un intorno di $+\infty$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$, dal criterio del confronto

asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx = -\infty$. Ne segue che

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge negativamente.

6. $\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2} dx$

- (a) diverge positivamente (b) non esiste
(c) converge a un valore maggiore o uguale a e ► (d) converge a un valore minore o uguale a 2

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2}$ e osserviamo che $f(x) \geq 0$ in tutto l'intervallo di integrazione, quindi l'integrale converge o diverge positivamente.

Dato che $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x(\log x)^2}$, valutiamo l'integrale

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx. \text{ Calcoliamo una primitiva con la}$$

sostituzione $\log x = t$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{dx}{x} = dt$

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c, \text{ quindi}$$

$$\int_{\sqrt{e}}^M \frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{\sqrt{e}}^M = -\frac{1}{\log M} + \frac{1}{\log \sqrt{e}} = -\frac{1}{\log M} + 2$$

Allora $\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \lim_{M \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\log M} + 2 = 2.$

Ne segue che l'integrale converge e

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{(\sin x)^6}{x(\log x)^2} dx \leq \int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log^2 x)} = 2.$$

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} =$

- (a) 1 (b) e^2 ► (c) 0 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{e^{2n} n^{1+\frac{1}{n}}}{n!} = \frac{e^{2n} n n^{\frac{1}{n}}}{n!}$$

Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1$, consideriamo quindi

$b_n = \frac{e^{2n} n}{n!}$ e utilizziamo il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{e^{2n+2} (n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^{2n} n} = \frac{e^2 (n+1)}{n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{e^2 \cancel{(n+1)}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n+1}} = \\ &= \frac{e^2}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il criterio del rapporto ci garantisce quindi che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Poiché $a_n = b_n \cdot n^{\frac{1}{n}}$ otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) \log n}{2n+1}$

- (a) diverge positivamente
- (b) diverge negativamente
- (c) converge assolutamente
- (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \log n}{2n+1}.$$

Osserviamo che $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$.

Poniamo $a_n = \frac{\log n}{2n+1}$ e scriviamo la serie come $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$.

Poiché $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$, la serie è a segni alterni.

Osserviamo anche che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{2n+1} = 0$. Verifichiamo ora la

decrecenza di $\{a_n\}$. Poniamo $f(x) = \frac{\log x}{2x+1}$. Risulta

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x+1) - (\log x) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2 + \frac{1}{x} - 2 \log x}{(2x+1)^2}.$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - 2 \log x = -\infty$, otteniamo che $f'(x) < 0$

in un intorno di $+\infty$, quindi f è definitivamente decrescente

e di conseguenza anche a_n lo è. Per il criterio di Leibniz la

serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

Invece $\sum_{n \geq 1} |(-1)^n a_n| = \sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{2n+1}$ diverge per

il criterio del confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{(2n+1)} = 0, \quad n \rightarrow +\infty \text{ e } \sum_n b_n = +\infty.$$

La serie data quindi converge ma non converge assolutamente.

9. La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{\arctan(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$

- (a) non è né superiormente né inferiormente limitata (b) è limitata inferiormente ma non superiormente
 ► (c) è limitata (d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{\arctg(xy) - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Osserviamo che

$$|f(x,y)| = \frac{|\arctg(xy) - x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{|\arctg(xy)|}{1 + x^2 + y^2} + \frac{|-x^2 - y^2|}{1 + x^2 + y^2} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1+0+0} + \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{2} + 1$$

quindi f è limitata.

10. Nel punto $(0,0)$ la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$

(a) è differenziabile

(b) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

► (c) non è continua e ha una sola derivata parziale

(d) è continua e ha entrambe le derivate parziali

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Verifichiamo la continuità nel punto $(0,0)$.

Consideriamo la restrizione di f alla curva $\gamma(t) = (0,t)$, $t \geq 0$

$$g(t) = f(\gamma(t)) = f(0,t) = -\frac{1}{t}$$

Dato che $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$, la funzione f

non è continua in $(0,0)$.

Verifichiamo ora che esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Per quanto riguarda l'altra derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h} - 0 \right) = -\infty$$

quindi f non è derivabile rispetto a y in $(0,0)$.